Arbeitsblatt: Ober- und Untersummen lineare Funktion

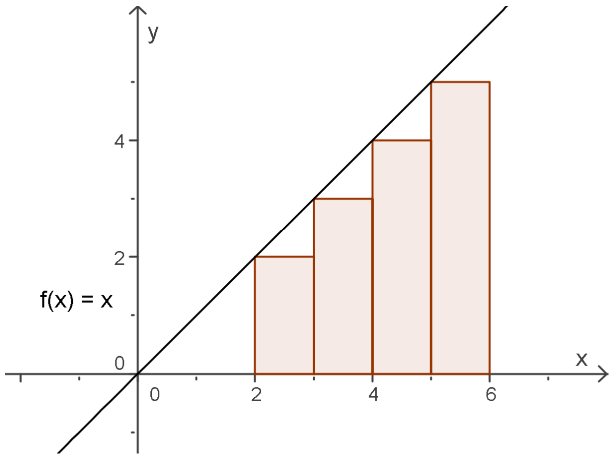
Aufgabe: Berechne den Flächeninhalt unter der Kurve f(x) = x im Intervall von

(1) 2 bis 6 (2) a bis b

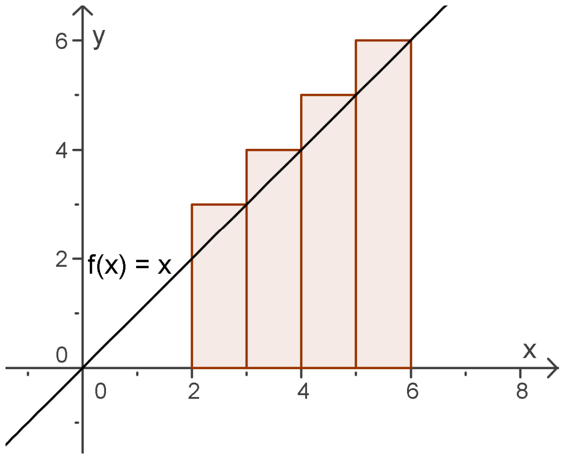
mit Hilfe von Ober- und Untersummen!

Anleitung

(1) Im Intervall von 2 bis 6:



Skizze zu (1): Untersumme



Skizze zu (1): Obersumme

Unterteilung in 4 Teile (Δx = 1)

U_4 = 1 . (2 + 3 + ... + ...) = 14

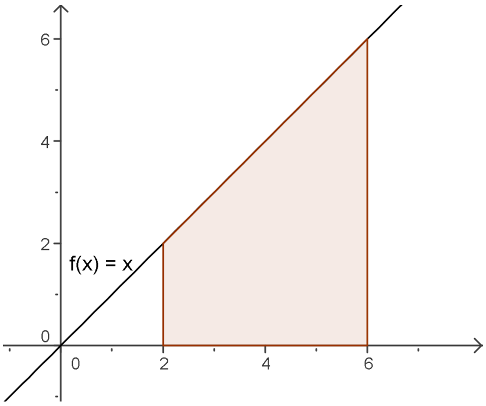
O_4 = 1 . (3 + 4 + ... + ...) = 18 $14 \le A \le 18$

Unterteilung in 8 Teile (Δx = ½)

U_8 = ½ . (2,0 + 2,5 + …………..………......…………………) = ...

O_8 = ½ . (2,5 + 3,0 + ………………………………………) = ... ≤ A ≤ ....

usw.



Zum Vergleich:

In diesem speziellen und sehr einfachen Fall ist eine genaue Flächenberechnung der Fläche unter der Kurve f(x) = x von 2 bis 6 möglich (Trapez oder Differenz von Dreiecken):

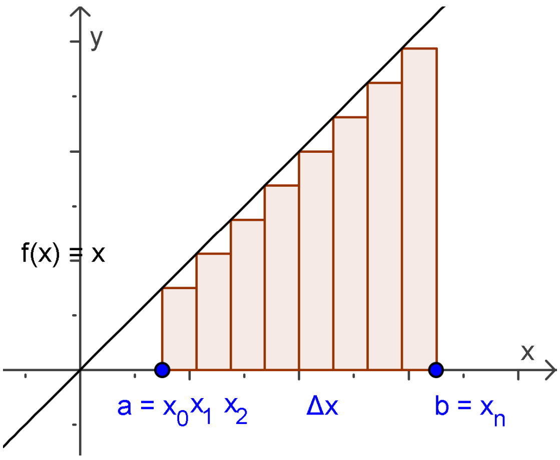
A = ...

Aufgabenstellung

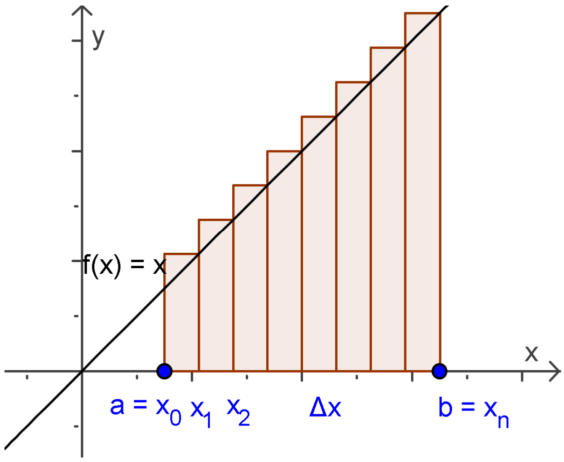
Erstelle die oben abgebildete Konstruktion mit GeoGebra und vergleiche die erhaltenen Werte von Ober- und Untersumme.

Hinweis: Die benötigten Befehle lauten: Obersumme[f,a,b,n] und Untersumme[f,a,b,n].

(2) Im Intervall von a bis b:



Skizze zu (2): Untersumme



Skizze zu (2): Obersumme

Unterteilung in n Teile ($\Delta x = (b - a)/n$)

$U_n = \Delta x \cdot [a + (a + \Delta x) + ($ .... $) +$ . . . . $+ (b - \Delta x)] =$

(Hinweis: endliche arithmetische Reihe (Formelsammlung): $s = (a_1 + a_n) . n/2$)

$= \Delta x \cdot [$ ....]

$O_n = \Delta x \cdot [(a + \Delta x) + ($ .... $) +$ . . . . $+ b] =$

$= \Delta x \cdot [(a + \Delta x) + b] . n/2$

$$½ \cdot \Delta x \cdot n \cdot (a + b - \Delta x) \le \mathbf{A} \le ½ \cdot \Delta x \cdot n \cdot (a + \Delta x + b)$$

weil $\Delta x \cdot n =$ .... ist, folgt

$$½ \cdot (b - a) \cdot (a + b - \Delta x) \le \mathbf{A} \le ½ \cdot (b - a) \cdot (a + b + \Delta x)$$

Der Grenzübergang für $n \to \infty$ bzw. $\Delta x \to 0$ liefert

$$½ \cdot (b - a) \cdot (a + b) \le \mathbf{A} \le ½ \cdot (b - a) \cdot (a + b)$$

eine einfache algebraische Umformung führt zu

$$\text{................................} \le \mathbf{A} \le \text{..............................}$$

und somit $\boxed{A = \int_a^b x.dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}}$

Vermutung für allgemeine Berechnung: $\boxed{A = \int_a^b f(x).dx = \text{.....................}}$